



Lineare Algebra (Informatik) Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (Relationen, Äquivalenzrelationen)

- (i) Es sei $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass

$$x \sim y : \Longleftrightarrow x^2 = y^2$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert und geben Sie alle Äquivalenzklassen an.

- (ii) Es sei $M := \{a, b\}$ eine zweielementige Menge. Bestimmen Sie alle möglichen Relationen $\mathcal{R}$ auf M und untersuchen Sie diese jeweils auf die folgenden Eigenschaften:
- (a) Reflexivität
 - (b) Symmetrie
 - (c) Transitivität

Hinweis: Eine Relation $\mathcal{R} = (M, R)$ ist definiert über eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$. Denken Sie bei der Untersuchung der Relationen an die Aussagenlogik.

Lösung 1

- (i) $\{(x, y) : x, y \in X \wedge x \sim y\} = \{(0, 0), (-2, -2), (-1, -1), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (2, 2), (-2, 2), (2, -2)\}$.

Seien $x, y, z \in X$. $\sim$ ist

- reflexiv, da offenbar $x^2 = x^2$ gilt.
- symmetrisch: $x \sim y \Longleftrightarrow x^2 = y^2 \Longleftrightarrow y^2 = x^2 \Longleftrightarrow y \sim x$, und
- transitiv:

$$\begin{aligned} x \sim y \wedge y \sim z &\Longleftrightarrow x^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2 \\ &\Longleftrightarrow x^2 = y^2 = z^2 \\ &\Rightarrow x^2 = z^2 \\ &\Longleftrightarrow x \sim z. \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklassen sind gegeben durch $\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}$.

(ii) Es ist $M \times M = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$. Jede Teilmenge davon ist eine Relation:

Relation $\mathcal{R}$	reflexiv	symmetrisch	transitiv
$\emptyset$	—	✓	✓
$\{(a, a)\}$	—	✓	✓
$\{(a, b)\}$	—	—	✓
$\{(b, a)\}$	—	—	✓
$\{(b, b)\}$	—	✓	✓
$\{(a, a), (a, b)\}$	—	—	✓
$\{(a, a), (b, a)\}$	—	—	✓
$\{(a, a), (b, b)\}$	✓	✓	✓
$\{(a, b), (b, a)\}$	—	✓	—
$\{(a, b), (b, b)\}$	—	—	✓
$\{(b, a), (b, b)\}$	—	—	✓
$\{(a, a), (a, b), (b, a)\}$	—	✓	—
$\{(a, a), (a, b), (b, b)\}$	✓	—	✓
$\{(a, a), (b, a), (b, b)\}$	✓	—	✓
$\{(a, b), (b, a), (b, b)\}$	—	✓	—
$\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$	✓	✓	✓

Die Äquivalenzrelationen auf M sind gerade die Relationen, die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, d.h. $\{(a, a), (b, b)\}$ und $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

Aufgabe 2 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität sowie Bijektivität. Beweisen Sie jeweils Ihr Ergebnis.

(i) $f : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, +1\}, n \mapsto (-1)^n$

(ii) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - 2x$

(iii) $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto n^2 - 1$

(iv) $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$

Lösung 2

(i) f ist **nicht injektiv**, denn es gilt $f(2) = 1 = f(4)$, obwohl $2 \neq 4$.

f ist jedoch **surjektiv**, denn es gilt $f(1) = -1$ und $f(2) = +1$.

Da f nicht injektiv ist, ist f insbesondere **nicht bijektiv**.

(ii) g ist **injektiv**:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = 1 - 2x = 1 - 2y = g(y)$.

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= 1 - 2y \\ \iff -2x &= -2y \\ \iff x &= y \end{aligned}$$

g ist **surjektiv**:

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $x = \frac{1-y}{2}$. Dann ist $x \in \mathbb{R}$ und es gilt $g(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1-y}{2} = y$.

Somit ist g auch **bijektiv**.

(iii) h ist **injektiv**:

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$. Dann gilt wegen $0 < m, n$ auch $m^2 \neq n^2$ und damit $h(m) \neq h(n)$.

h ist **nicht surjektiv**, da hier nur auf die „Quadratzahlen minus 1“, also auf $\{0, 3, 8, 15, 24, \dots\}$ abgebildet wird. Insbesondere liegt also 1 nicht im Bild.

h ist **nicht bijektiv**, da nicht surjektiv.

(iv) ℓ ist **nicht injektiv**, denn es gilt $\ell(0) = 0 = \ell(\pi)$, obwohl $0 \neq \pi$.

ℓ ist auch **nicht surjektiv**, da $\forall x \in \mathbb{R} : \sin x \in [-1, 1] \subsetneq \mathbb{R}$.

ℓ ist also auch **nicht bijektiv**.

Aufgabe 3 (Urbild, Bild)

(i) Für $a > 0$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - a^2$ gegeben. Bestimmen Sie

(a) das Bild des Intervalls $[-1, 1] := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ unter f ,

(b) das Urbild des Intervalls $(0, 1] := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ unter f .

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(ii) Seien A, B Mengen und $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Weiter sei I eine Indexmenge und für alle $i \in I$ seien U_i Teilmengen von B . Zeigen Sie die Gleichung:

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i).$$

(iii) Zeigen Sie weiter, dass der Ausdruck in (ii) im Allgemeinen nicht richtig ist, wenn man f^{-1} durch f ersetzt und U_i als Teilmengen von A wählt.

Lösung 3

(i) (a) $f([-1, 1]) = [-a^2, 1 - a^2]$:

$$x \in [-1, 1] \iff x^2 \in [0, 1] \iff x^2 - a^2 \in [-a^2, 1 - a^2]$$

(b) $f^{-1}((0, 1]) = [-\sqrt{1+a^2}, -a) \cup (a, \sqrt{1+a^2}]$:

$$x \in f^{-1}((0, 1]) \iff f(x) \in (0, 1] \tag{1}$$

$$\iff x^2 - a^2 \in (0, 1] \tag{2}$$

$$\iff x^2 > a^2 \wedge x^2 \leq 1 + a^2. \tag{3}$$

$$(a) \quad x^2 > a^2 \iff x > a \vee x < -a \iff x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$$

$$(b) \quad x^2 \leq 1 + a^2 \iff -\sqrt{1+a^2} \leq x \leq \sqrt{1+a^2} \iff x \in [-\sqrt{1+a^2}, \sqrt{1+a^2}]$$

Also:

$$(3) \iff x \in ((-\infty, -a) \cup (a, \infty)) \cap [-\sqrt{1+a^2}, \sqrt{1+a^2}] \tag{4}$$

Da $a < \sqrt{1+a^2}$ und $-a > -\sqrt{1+a^2}$ haben wir also

$$(4) \iff x \in [-\sqrt{1+a^2}, -a) \cup (a, \sqrt{1+a^2}] \tag{5}$$

- (ii) Nach den Definitionen von Urbild und Schnitt gilt folgende Kette von Äquivalenzen, für jedes $x \in A$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) &\iff f(x) \in \bigcap_{i \in I} U_i \\ &\iff \forall_{i \in I} f(x) \in U_i \\ &\iff \forall_{i \in I} x \in f^{-1}(U_i) \\ &\iff x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i). \end{aligned}$$

Da $x \in A$ beliebig war, folgt $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i)$.

- (iii) Zeigen wir nun, dass für eine Funktion $f : A \rightarrow B$ und Mengen $U, V \subset A$ im Allgemeinen $f(U \cap V) \neq f(U) \cap f(V)$ ist. Es reicht dafür, ein geeignetes Beispiel anzugeben:

Sei etwa $f : \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $f(1) = f(2) = 1$ und seien $U = \{1\}$, $V = \{2\}$. Dann ist $U \cap V = \emptyset$, also auch $f(U \cap V) = \emptyset$. Andererseits ist $f(U) = f(V) = \{1\}$ und damit $f(U) \cap f(V) = \{1\} \neq \emptyset = f(U \cap V)$.

Aufgabe 4 (Verkettung von Funktionen)

- (i) Seien $f : W \rightarrow X$, $g : X \rightarrow Y$, $h : Y \rightarrow Z$ Funktionen. Zeigen Sie, dass für die Abbildung von W nach Z gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

die Verkettung also assoziativ ist.

- (ii) Betrachten Sie nun die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 5x$. Bestimmen Sie $f \circ g$ sowie $g \circ f$. Folgern Sie daraus, dass die Verkettung i. A. nicht kommutativ ist.

Lösung 4

- (i) $\forall x \in W : ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$
(ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 5x) = e^{x^2 - 5x}$.
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = (e^x)^2 - 5e^x = e^{2x} - 5e^x$.
Es folgt also: $f \circ g \neq g \circ f$.

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe: Paare, 3-Tupel)

- (i) Seien A, B Mengen und $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

definiert in der Tat ein Paar, d.h. $\forall a, a' \in A, \forall b, b' \in B : (a, b) = (a', b') \Rightarrow a = a' \wedge b = b'$.

- (ii) Seien A, B, C Mengen mit $|A \cap B \cap C| \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Menge (von Mengen)

$$\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

kein 3-Tupel definiert.

Lösung 5

- (i) Seien $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$. Es ist nach obiger Definition $(a, b) = (a', b') \iff$

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}.$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder ist $a = b$ oder es ist $a \neq b$.

1) $a = b$: Dann folgt aus

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\} \stackrel{!}{=} \{\{a'\}, \{a', b'\}\},$$

dass $a = a' = b'$, also insgesamt $a = b = a' = b'$ und damit insbesondere $a = a' \wedge b = b'$.

2) $a \neq b$: Dann lässt sich die Menge von Mengen $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ nicht vereinfachen (denn $\{a\} \neq \{a, b\}$) und es folgt aus

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\},$$

dass $a = a' \wedge b = b'$ (Denn wäre $a \neq a'$, dann wäre $\{a\} \neq \{a'\}$, und $\{a, b\} \neq \{a'\}$, weil $a \neq b$. Daraus folgt: $a = a'$. Nun muss noch gelten: $\{a, b\} \stackrel{!}{=} \{a, b'\}$. Daraus folgt: $b = b'$).

- (ii) Nehmen wir an, es gäbe eine solche Mengendefinition von 3-Tupeln. Betrachte z.B. die Mengen $A = B = C = \{1, 2, 3\}$ und die 3-Tupel $(1, 2, 2)$ sowie $(1, 2, 1)$. Letzteres sind zwei verschiedene 3-Tupel, doch die Mengendefinition kann sie nicht unterscheiden, denn:

$$(1, 2, 2) = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 2\}\} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2\}\} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 1\}\} = (1, 2, 1)$$

Die Mengendefinition versagt also bei 3-Tupeln.